Proceedings of IAM, V.3, N.2, 2014, pp.249-255

МЕТОД ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОПИСЫВАЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ ПРИ ДОБЫЧЕ НЕФТИ

Фикрет А. Алиев, К.К., Гасанов, А.Р. Гулиев

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com, aslan_orxan@rambler.ru

Резюме. Рассматривается начальная задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, возникающих при моделировании добычи нефти газлифтным способом. Меняя местами аргументы, получается новая начальная задача по времени, эквивалентная исходной системе гиперболических уравнений. Разыскивая давление газа или газожидкостной смеси (ГЖС) (в зависимости от координат) в виде линейной функции (метод прогонки) от соответствующих объема газа или ГЖС, показывается, что коэффициенты этой функции удовлетворяют двум дифференциальным уравнениям, одно из которых соответствует классическому квазилинейному уравнению с частными производными, а второе является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, коэффициенты которого зависят от решения первого уравнения. Для нахождения решения квазилинейного уравнения в частных производных надо решить соответствующие задачи Коши методом характеристик.

На простом примере, когда начальные данные являются постоянными, показывается, что решения совпадают с ранее известными.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, газ лифт, квазилинейное уравнение, метод прогонки, метод характеристик.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

Известно [4, 6, 8], что для нахождения объема ГЖС и давления в любой точке подъемника в газлифтном процессе при добыче нефти исследуется следующая система дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа первого порядка

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{c}{F}\cdot\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}, \\ &\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -F\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} - 2aQ(x,t), \quad -\infty < t < \infty, \ x > 0 \end{aligned} \tag{1}$$

со следующими условиями

$$P(0,t) = P_o(t), \ \ Q(0,t) = Q_0(t), \ -\infty < t < \infty, \tag{2}$$

где a, F, c - постоянные, имеющие конкретные физические значения [4].

Поменяв роль аргументов x и t уравнения (1) можем записать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}=-\frac{c}{F}\cdot\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}\,,\\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}=-F\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}-2aQ(x,t),\ -\infty<x<\infty,\ t>0\end{gathered}\tag{3}$$

а начальные условия (2) приводятся к виду

$$P(x,0)=P_o(x),\quad Q(x,0)=Q_0(x),\ \infty<x<\infty\ .\tag{4}$$

Таким образом, для задачи (1), (2) получаем эквивалентную начальную задачу (3), (4).

Из линейности уравнения (3), аналогично [1,2,5], можем разыскивать давление $P(x,t)$ линейной функций от объема ГЖС $Q(x,t)$ в следующем виде

$$P(x,t)=S(x,t)\cdot Q(x,t)+\alpha(t)R(x),\tag{5}$$

где $S(x,t), R(x)$ подлежат определению, а что касается скалярной функции $\alpha(t)$, то она любая функция, удовлетворяющая следующим условиям

$$\alpha(0)=0,\ \int_0^\infty \alpha(t)dt=1,\tag{6}$$

т.е., в частном случае, такую $\alpha(t)$ можно выбрать как $\alpha(t)=te^{-t}$.

2. Метод прогонки

Чтобы получить уравнения для $S(x,t), R(t)$ берем из (5) производные

$$\begin{gathered}\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}Q(x,t)+S(x,t)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}+\alpha(t)R'(x),\\ \frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}Q(x,t)+S(x,t)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}+\alpha'(t)R(x).\end{gathered}\tag{7}$$

Подставляя эти производные (7) в систему (3) получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}Q(x,t)+S(x,t)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}+\alpha(t)R'(x)=-\frac{c}{F}\cdot\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t},\\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}=-F\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}Q(x,t)+S(x,t)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}+\alpha'(t)R(x)\right)-2aQ(x,t).\end{gathered}\tag{8}$$

Исключая из (8) производное $\dfrac{Q(x,t)}{\partial x}$, имеем

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}Q(x,t)-FS(x,t)\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}Q(x,t)+S(x,t)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}+\alpha'(t)R(x)\right)- \\ -2aS(x,t)Q(x,t)+\alpha(t)R'(x)=-\frac{c}{F}\cdot\frac{Q(x,t)}{\partial t} \tag{9}$$

Упростив полученное уравнение (9), получим

$$\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}-FS(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}-2aS(x,t)\right)Q(x,t)+ \\ +\left(\frac{c}{F}-F\cdot S^2(x,t)\right)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}-2aS(x,t)-FS(x,t)\alpha'(t)R(x)+\alpha(t)R'(x)=0 \tag{10}$$

Теперь проинтегрируем (10) от *0* до бесконечности по t:

$$\int_0^\infty\left[\left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}-FS(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}-2aS(x,t)\right)Q(x,t)+\left(\frac{c}{F}-FS(x,t)\right)\times \\ \times\frac{\partial Q(x,t)}{dt}-2aS(x,t)-FS(x,t)\alpha'(t)R(x)+\alpha(t)R'(x)\right]dt=0. \tag{11}$$

Используя интегрирование по частям, имеем

$$\int_0^\infty\left(\frac{c}{F}-FS^2(x,t)\right)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}dt=\left(\frac{c}{F}-FS^2(x,t)\right)Q(x,t)\Big|_0^\infty+ \\ +2F\int_0^\infty Q(x,t)S(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}dt. \tag{12}$$

Таким образом, учитывая (12) в (11), получим

$$\int_0^\infty\left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}-FS(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}-2aS(x,t)+2FS(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\right]Q(x,t)dt+ \\ +R'(x)-F\left(\int_0^\infty S(x,t)\alpha'(t)dt\right)R(x)+\left(\frac{c}{F}-FS^2(x,t)\right)Q(x,t)\ \Big|_0^\infty=0. \tag{13}$$

Поскольку $Q(x,t)$ является любой функцией, то из (13) получаются следующие уравнения для $S(x,t)$ и $R(x)$

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}+FS(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}-2aS(x,t)=0, \tag{14}$$

$$R'(x)-F\left(\int_0^\infty S(x,t)\alpha'(t)dt\right)R(x)+\left(FS^2(x,0)-\frac{c}{F}\right)Q(x,0)=0. \tag{15}$$

Отметим что, если $\left(\frac{c}{F}-FS^2(x,t)\right)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}=0$ то уравнения (14) и (15) имеют вид

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} - FS(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} - 2aS(x,t) = 0, \tag{16}$$

$$R'(x) + F\left(\int_0^\infty S(x,t)\alpha'(t)dt\right)R(x) = 0. \tag{17}$$

Для решения начальной задачи (3), (4) предполагается, что $\lim_{x\to\infty} Q(x,t) = 0,\ \lim_{x\to\infty} P(x,t) = 0$. Если $\left(\frac{c}{F} - FS^2(x,t)\right)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = 0$, тогда из (17) $R(x) = 0$ и поэтому, соотношение (5) принимает вид

$$P(x,t) = S(x,t)Q(x,t). \tag{18}$$

На основе постановки задачи (3), (4) надо решить квазилинейное уравнение (14) или (15) при начальном условии

$$S(x,0) = r(x) = \frac{P_0(x)}{Q_0(x)}\ . \tag{19}$$

Для решения квазилинейного уравнения (14) (или (16)) при начальном условии (19) используется метод характеристик [7], где системы уравнений характеристик будет

$$\frac{dt}{FS} = \frac{dx}{1} = \frac{dy}{2aS}\ . \tag{20}$$

Отсюда получаем следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{dy}{dt} = \frac{2a}{F},\\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{Fy}\end{gathered} \tag{21}$$

с начальными условиями

$$\begin{gathered}x(\tau) = \xi,\\ y(\tau) = \eta.\end{gathered} \tag{22}$$

Решая (21) и (22) получим

$$x(t) = \xi + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{2a(t-\tau) + F\eta}{F\eta}\right|,\ y(t) = \frac{2a}{F}(t-\tau) + \eta. \tag{23}$$

В полученном решении (23), полагая $t = 0, \tau = t, \xi = x, \eta = S$, примем следующие обозначения

$$\begin{gathered}\varphi_1(t,x,S) = x + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{FS - 2at}{FS}\right|,\\ \varphi_2(t,x,S) = -\frac{2a}{F}t + S.\end{gathered} \tag{24}$$

Отметим, что системы функции (24) являются фундаментальной интегральной системой [7, 9] для квазилинейной уравнений (14). Тогда решение квазилинейного уравнения (14) при начальном условии (19) имеет вид

$$\varphi_2(t,x,S(x,t)) = r\left(\varphi_1(t,x,S(x,t))\right),$$

или учитывая выражение $r(x) = \dfrac{P_0(x)}{Q_0(x)}$, последнее имеет вид

$$P_0\left(x + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{FS(x,t)-2at}{FS(x,t)}\right|\right) = \left(S(x,t) - \frac{2a}{F}t\right)Q_0\left(x + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{FS(x,t)-2at}{FS(x,t)}\right|\right). \quad (25)$$

Аналогичным способом решение уравнения (16) при начальном условии (19) имеет вид:

$$P_0\left(x + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{FS(x,t)+2at}{FS(x,t)}\right|\right) = \left(S(x,t) + \frac{2a}{F}t\right)Q_0\left(x + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{FS(x,t)-2at}{FS(x,t)}\right|\right). \quad (26)$$

Из уравнения (25), определив функции $S(x,t)$ подставляем их в (15) и решив ее с соответствующим начальным условием, находим $R(x)$. Далее, эти найденные функции $S(x,t)$ и $R(x)$, подставляя в (5), находим $P(x,t)$ при помощи $Q(x,t)$.

Полученные выражения для функции $P(x,t)$ поставив в систему (3), для $Q(x,t)$ имеется соответствующее линейное уравнение в частных производных первого порядка при начальном условии $Q(x,0) = Q_0(x)$, которое тоже можно решить с помощью методам характеристик. Тогда $P(x,t)$ уже будет известным. Таким образом, находится решение системы (3) при начальными условиями (4).

Пример. Пусть начальные условия $Q_0(x)$ и $P_0(x)$ не зависят от аргумента x и тогда из соотношения (26) имеем

$$P_0 = \left(S(x,t) + \frac{2a}{F}t\right)Q_0. \quad (27)$$

В этом случае из (26) получаем $S(x,t) = r - \dfrac{2a}{F}t$.

Учитывая это в формуле (5) для $P(x,t)$ имеем:

$$P(x,t) = \left(\frac{P_0}{Q_0} - \frac{2a}{F}t\right)Q(x,t). \quad (28)$$

Далее, подставляя $P(x,t)$ в одно из уравнений (3), например в первое уравнение для определения $Q(x,t)$, получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{P_0}{Q_0} - \frac{2a}{F}t\right)\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{c}{F}\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (29)$$

при начальном условии $Q(x,0)=Q_0(x)$.

Используя метод характеристик аналогично, для решения $Q(x,t)$ из задач (29) получим

$$Q(x,t)=Q_0\left(x+\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{FS(x,t)+2at}{FS(x,t)}\right|\right). \qquad (30)$$

Так как $Q_0(x)$- постоянная, то из (30) имеем $Q(x,t)=Q_0$. Подставляя последнее в (28) для $P(x,t)$ имеем следующее выражение:

$$P(x,t)=P_0-\frac{2at}{F}Q_0$$

которое совпадает с [3].

Литература

1. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of linear control system: Analytical methods and computational algorithms, Gordon and Breach, Amsterdam, 1998, 272 p.
2. Gasanov K. K., Aliyev A.M., Solution of linear heat flow problem in non homogeneous-semi bounded body, The 4th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 2013, Borovets, Bulgaria, pp.30-31.
3. Алиев Н.А., Алиев Ф. А., Гулиев А.П., Ильясов М. Х., Метод рядов в решении одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, возникающей при добыче нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.2, 2013, c.113-135.
4. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А., Моделирование работы газлифтной скважины, Док. НАН Азербайджана, 2008, №4, с. 107-116.
5. Брайсон А., Хо Ю-Ши., Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972, 544 с.
6. Мирзаджанзаде А.Х. и др., Технология и механика добычи нефти, М.: Наука, 1986, 382с.
7. Годунов С.К., Уравнения математической физики, М.: Наука, 1972, 392 с.
8. Чарный И.А., Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах, М., Гостехиздат, 1951, 389 с.
9. Петровский И.Г., Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Наука, 1970, 178 с.

Neft hasilatında hərəkəti təsvir edən hiperbolik tənliklər Sisteminin həlli üçün qovma üsulu

F.Ə. Əliyev, K.K. Həsənov, A.P. Quliyev

XÜLASƏ

Neftin qazlift üsulu ilə hasilatının modelləşdirilməsində qarşıya çıxan birtərtibli xüsusi törəməli differensial tənliklər sistemi üçün başlanğıc məsələsinə baxılır. Arqumentlərin yerini dəyişməklə zamana görə yeni başlanğıc məsələsi alınır ki, bu da əvvəlcədən verilmiş məsələyə ekvivalentdir.

Qaz və ya qaz maye qarışığındakı təzyiqin (koordinatlardan asılı olaraq) uyğun qazın həcmindən asılılığı xətti funksiya kimi axtarılır (qovma üsulu). Göstərilir ki, bu funksiyanın əmsalları iki differensial tənliyin köməyi ilə tapılır. Onlardan birincisi xüsusi törəməli klassik kvazixətti tənliyin, ikincisi isə adi differnsial tənliyin həlləridir. Xüsusi törəməli kvazixətti tənlik üçün uyğun Koşi məsələsinin həlli tapılır. Sadə misalda başlanğıc verilənlər sabit olan halda göstərilir ki, tapılan həll əvvəlcədən məlum olan həllə üst-üstə düşür.

Açar sözlər: hiperbolik tənliklər, qaz lift, kvazixətti tənliklər, qovma üsulu, xarakteristika üsulu.

Sweep method for solving a system of hyperbolic equations describing the motion in oil production

F.A. Aliev, K.K. Gasanov, A.P. Guliev

ABSTRACT

The initial value problem for a system of partial differential equations of the first order arising in the modeling of oil production by the gas lift is considering. By interchanging the arguments, we obtain a new initial problem for the time, equivalent to the initial system of hyperbolic equations. With searching of pressure of gas or gas-liquid mixture (GLM) (depending on the coordinates) as a linear function (sweep method) from the corresponding volume of gas or GLM, we show that the coefficients of this function satisfy the two differential equations, one of which corresponds to the classical quasi-linear partial differential equations , and the second correspond to the linear ordinary differential equation of the first order, whose coefficients depend on the solution of the first equation. To find the solutions of a quasilinear partial differential equations necessary to solve corresponding Cauchy problem with method of characteristics. On a simple example, when the initial data are constant, it is shown that the solutions coincide with previously known.

Keywords: hyperbolic equation, gaslift, quasilinear equation, sweep method, method of characteristics.